H26　土浦日大＜数学＞

（注意）(1) 定規，コンパス，分度器，計算機は使用してはいけません。

(2) １つの□には１つの数字が入ります。その数字をマークしなさい。

(3) 分数で答える場合は必ず約分し，比で答える場合は最も簡単な整数比で答えなさい。また，根号の中はできるだけ小さい自然数で答えなさい。

1 次の□をうめなさい。

(1) $-3\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}\right)\div\dfrac{11}{4}=-\boxed{ア}$

(2) $(\sqrt{2}-1)^2+2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\boxed{イ}$

(3) ２次方程式 $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=3\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ の解は $x=-\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$，$\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ である。

(4) 連立方程式 $\begin{cases}2y=x+1\\ \dfrac{x+1}{3}+y=\dfrac{10}{3}\end{cases}$ の解は $x=\boxed{キ}$，$y=\boxed{ク}$ である。

(5) 関数 $y=ax^2$ で，x が１から３まで変化するときの変化の割合が $\dfrac{4}{3}$ のとき，$a=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である。

2 次の□をうめなさい。

(1) Ａ君は自宅から13kmの距離にある学校へ，徒歩とバスで通っている。徒歩の速さは時速４kmであり，バスの速さは時速24kmであるとき，自宅から学校までは50分かかった。バスの待ち時間は無視できると考えるとき，徒歩の区間は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ kmである。

(2) 図１のように，AB＝7，BC＝6である△ABCにおいて，AB，BC，CAの中点をそれぞれD，E，Fとする。EG：GC＝1：2となる点をGとし，DGとEFの交点をHとすると，EH＝$\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

図１

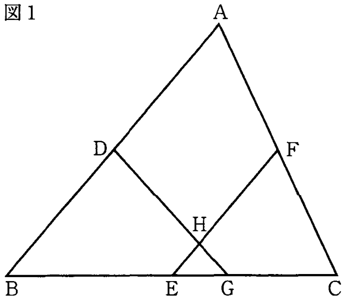
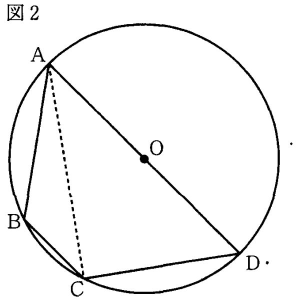


図２

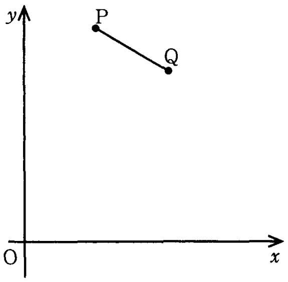


(3) 図２のように，円OにAD∥BCの台形ABCDが内接しており，線分ADは円Oの直径である。また，$\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}=1:2$ である。

このとき，∠ACD＝$\boxed{オ}\boxed{カ}$°であり，∠BCD＝$\boxed{キ}\boxed{ク}\boxed{ケ}$°である。

3 図において，線分 PQ の両端の座標は P(2, 10)，Q(4, 8) である。サイコロを 1 回投げて出た目の数を a とする。

このとき，次の $\boxed{}$ をうめなさい。



(1) 関数 $y=ax$ のグラフが線分 PQ と交点(両端を含む)をもつ確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

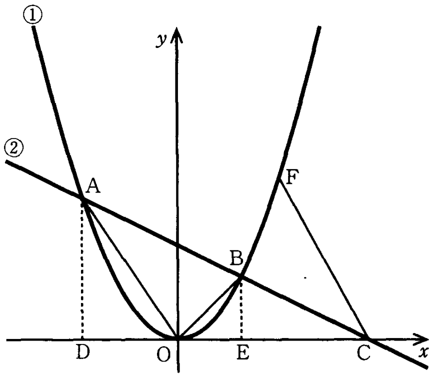
(2) 1 回目を投げた後にもう 1 回サイコロを投げて，2 回目に出た目の数を b とする。

(i) 関数 $y=\dfrac{b}{a}x$ のグラフが線分 PQ と交点(両端を含む)をもつ確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

(ii) 関数 $y=x+\dfrac{a+b}{2}$ のグラフが線分 PQ と交点(両端を含む)をもつ確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}\boxed{キ}}$ である。

4　図において，①は $y=ax^2$，②は $y=bx+c$ のグラフである。①，②の交点をA，Bとし，②と x 軸との交点をCとする。また，A，Bから x 軸にひいた垂線をAD，BEとし，①の $x>0$ の部分に△OAB＝△BCFとなる点Fをとる。Bの座標が(2，2)であり，AB：BC＝5：4とする。

このとき，次の□をうめなさい。



(1)　$a=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2)　AD：BE＝$\boxed{ウ}$：$\boxed{エ}$ であり，$b=-\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$，$c=\boxed{キ}$ である。

(3)　Fの x 座標は $\dfrac{-\boxed{ク}+\sqrt{\boxed{ケ}\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$ である。

5 上面の半径 3 cm，高さ 4 cm，母線の長さ 5 cm の直円すいの形をしたグラスに水が入っている。このグラスに氷の球を入れたところ，図 1 のように，氷の球は水面とグラスに接し，氷の中心はグラスの底から $\frac{10}{3}$ cm の高さのところにあった。しばらくすると，図 2 のように溶けた氷が水になって水面の高さが上昇した。氷は溶けると体積が $\frac{8}{9}$ 倍の水になり，氷が溶けたときにグラスから水はこぼれなかったものとする。また，グラスは傾いていないものとする。

このとき，次の□をうめなさい。

(1) グラスの容積は $\boxed{アイ}\pi\text{cm}^3$ である。

(2) 氷の球の体積は $\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}\pi\text{cm}^3$ である。

(3) 図 2 の状態から $\dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{クケ}}\pi\text{cm}^3$ の水を注ぐと水面の高さがグラスの高さと一致した。

図 1 (最初の状態を横から見た図)

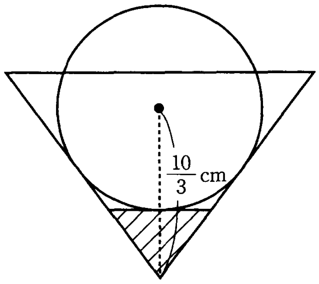
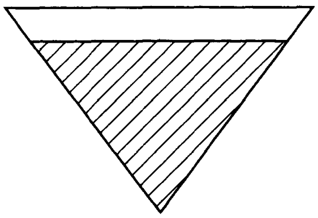


図 2 (氷の球が溶けて，水面の高さが上昇した状態を横から見た図)



H26　土浦日大＜数学＞

数学解答

1 (1)　1　(2)　6
(3)　ウ…1　エ…2　オ…5　カ…2
(4)　キ…3　ク…2
(5)　ケ…1　コ…3

2 (1)　ア…7　イ…5
(2)　ウ…7　エ…8
(3)　オ…9　カ…0　キ…1　ク…2
ケ…6

3 (1)　ア…2　イ…3
(2)　(i)　ウ…2　エ…9
(ii)　オ…5　カ…1　キ…2

4 (1)　ア…1　イ…2
(2)　ウ…9　エ…4　オ…1　カ…2
キ…3
(3)　ク…1　ケ…5　コ…5　サ…2

5 (1)　ア…1　イ…2
(2)　ウ…3　エ…2　オ…3
(3)　カ…5　キ…6　ク…2　ケ…7

1〔独立小問集合題〕

(1)**＜数の計算＞**与式 $=-3\times\frac{4}{9}+\left(\frac{8}{12}+\frac{3}{12}\right)\div\frac{11}{4}=-\frac{4}{3}+\frac{11}{12}\times\frac{4}{11}=-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{3}{3}=-1$

(2)**＜平方根の計算＞**与式 $=2-2\sqrt{2}+1+2\left(1+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)=2-2\sqrt{2}+1+2+\frac{4}{\sqrt{2}}+1=6-2\sqrt{2}+\frac{4\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=6-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6$

(3)**＜二次方程式＞**$x+\frac{1}{2}=A$ とおいて解くと，$A^2=3A$，$A^2-3A=0$，$A(A-3)=0$　$\therefore A=0,\ 3$　よって，$x+\frac{1}{2}=0$ より $x=-\frac{1}{2}$，$x+\frac{1}{2}=3$ より $x=\frac{5}{2}$ となる。

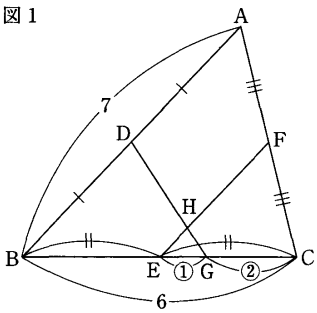
(4)**＜連立方程式＞**$2y=x+1$……①，$\frac{x+1}{3}+y=\frac{10}{3}$……② とする。①より，$-x+2y=1$……①′　②$\times3$ より，$x+1+3y=10$，$x+3y=9$……②′　①′＋②′ より，$2y+3y=1+9$，$5y=10$　$\therefore y=2$　これを②′に代入して，$x+6=9$　$\therefore x=3$

(5)**＜関数―比例定数＞**関数 $y=ax^2$ で，$x=1$ のとき $y=a\times1^2=a$，$x=3$ のとき $y=a\times3^2=9a$ だから，x の値が1から3まで変化するときの変化の割合は，$\frac{9a-a}{3-1}=4a$ である。これが $\frac{4}{3}$ であることより，$4a=\frac{4}{3}$ が成り立ち，これを解くと $a=\frac{1}{3}$ となる。

2〔独立小問集合題〕

(1)**＜一次方程式の応用＞**徒歩の区間を x km とおくと，A君の自宅から学校までの距離は13kmだから，バスの区間は $13-x$ km となる。徒歩の速さは時速4 km，バスの速さは時速24kmだから，歩いた時間は $\frac{x}{4}$ 時間，バスに乗っていた時間は $\frac{13-x}{24}$ 時間である。自宅から学校まで50分，すなわち $\frac{50}{60}=\frac{5}{6}$(時間)かかったから，$\frac{x}{4}+\frac{13-x}{24}=\frac{5}{6}$ が成り立つ。両辺を24倍してこれを解くと，$6x+13-x=20$ より，$x=\frac{7}{5}$(km) となる。

図1

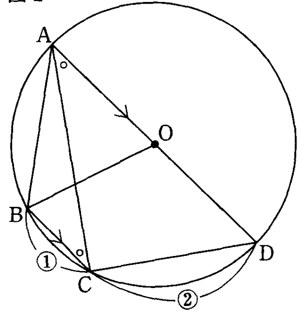


(2)**＜図形―長さ―相似＞**右図1の△ABCで，2点E，Fはそれぞれ辺BC，辺CAの中点だから，中点連結定理より，EF∥BAとなり，△GEH∽△GBDである。よって，EH：BD＝EG：BG であ

る。$BD=\frac{1}{2}BA=\frac{1}{2}\times7=\frac{7}{2}$，$BE=EC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times6=3$ であり，$EG:GC=1:2$ より，$EG=\frac{1}{1+2}EC=\frac{1}{3}\times3=1$ だから，$BG=BE+EG=3+1=4$ である。よって，$EG:BG=1:4$ だから，$EH:\frac{7}{2}=1:4$ が成り立つ。これを解くと，$EH\times4=\frac{7}{2}\times1$ より，$EH=\frac{7}{8}$ となる。

(3)＜**図形―角度―円周角**＞右図2で，線分ADは円Oの直径だから，$\angle ACD=90^\circ$ である。また，$AD /\!/ BC$ より，錯角は等しく，$\angle ACB=\angle CAD$ だから，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ である。これより，$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}=2:1:2$ だから，$\overset{\frown}{AB}=\frac{2}{2+1+2}\overset{\frown}{AD}=\frac{2}{5}\overset{\frown}{AD}$ となる。よって，図2のように2点B，Oを結ぶと，$\angle AOB=\frac{2}{5}\times180^\circ=72^\circ$ となるから，円周角の定理より，$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times72^\circ=36^\circ$ である。したがって，$\angle BCD=\angle ACB+\angle ACD=36^\circ+90^\circ=126^\circ$ である。

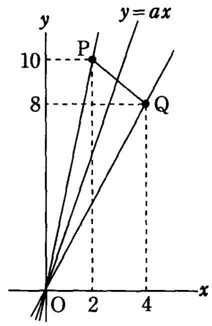
図2



3〔**確率**〕

(1)＜**確率―傾き**＞右図1のように，関数 $y=ax$ のグラフは原点を通る直線であり，直線OPの傾きは $\frac{10}{2}=5$，直線OQの傾きは $\frac{8}{4}=2$ である。これより，関数 $y=ax$ のグラフが線分PQと交点を持つのは，この関数のグラフの傾き a が $2\leqq a\leqq5$ となる場合で，$a=2,\ 3,\ 4,\ 5$ の4通りある。よって，サイコロを1回投げたときの目の数の出方は1～6の6通りあることから，求める確率は $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ となる。

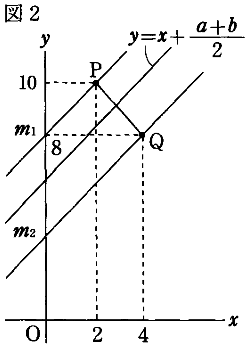
図1



(2)＜**確率―傾き，切片**＞(i)(1)と同様に考えると，関数 $y=\frac{b}{a}x$ のグラフが線分PQと交点を持つのは，この関数のグラフの傾き $\frac{b}{a}$ が $2\leqq\frac{b}{a}\leqq5$ となる場合である。サイコロを2回投げたときの1回目に出た目の数 a，2回目に出た目の数 b の組は $6\times6=36$(通り)あり，このうち，$2\leqq\frac{b}{a}\leqq5$ となる場合の a，b の組は $(a,\ b)=(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(1,\ 4)$，$(1,\ 5)$，$(2,\ 4)$，$(2,\ 5)$，$(2,\ 6)$，$(3,\ 6)$ の8通りある。よって，求める確率は $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$ となる。

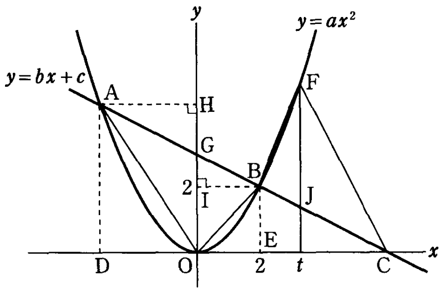
(ii)関数 $y=x+\frac{a+b}{2}$ のグラフは傾きが1で切片が $\frac{a+b}{2}$ の直線である。右図2のように，点Pを通る傾き1の直線の切片を m_1 とすると，この直線の式は $y=x+m_1$ となり，$10=2+m_1$ より，$m_1=8$ である。また，点Qを通る傾き1の直線の切片を m_2 とすると，その式は $y=x+m_2$ となり，$8=4+m_2$ より，$m_2=4$ である。よって，関数 $y=x+\frac{a+b}{2}$ のグラフが線分PQと交わるのは，この関数の切片 $\frac{a+b}{2}$ について，$4\leqq\frac{a+b}{2}\leqq8$ となる場合である。これより，$8\leqq a+b\leqq16$ となるので，この場合の a，b の組は $(a,\ b)=(2,\ 6)$，$(3,\ 5)$，$(3,\ 6)$，$(4,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(4,\ 6)$，$(5,\ 3)$，$(5,\ 4)$，$(5,\ 5)$，$(5,\ 6)$，$(6,\ 2)$，$(6,\ 3)$，$(6,\ 4)$，$(6,\ 5)$，$(6,\ 6)$ の15通りある。したがって，求める確率は $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$ となる。

図2



4 〔**関数—関数 $y=ax^2$ と直線**〕

≪基本方針の決定≫(2)　AD∥BE であることに着目する。　(3)　まず，△OAB の面積を求めよう。



(1)＜**比例定数**＞右図で，放物線 $y=ax^2$ は B(2, 2) を通るから，$2=a\times2^2$ が成り立ち，$a=\frac{1}{2}$ となる。

(2)＜**長さの比，直線の式—相似**＞右図で，AD∥BE より，△CAD∽△CBE となるから，AD：BE＝CA：CB である。ここで，AB：BC＝5：4 より CA：CB＝(5＋4)：4＝9：4，点 B の y 座標が 2 より BE＝2 だから，AD：2＝9：4 が成り立つ。これを解くと，AD×4＝2×9 より，AD＝$\frac{9}{2}$ となるから，点 A の y 座標は $\frac{9}{2}$ である。(1)より，放物線の式は $y=\frac{1}{2}x^2$ であり，点 A はこの放物線上にあるから，$\frac{9}{2}=\frac{1}{2}x^2$ より，$x^2=9$，$x=\pm3$ となり，点 A の x 座標は -3 である。直線 $y=bx+c$ は 2 点 $\mathrm{A}\left(-3,\ \frac{9}{2}\right)$，B(2, 2) を通るから，$\frac{9}{2}=-3b+c$，$2=2b+c$ が成り立つ。これら 2 式を連立方程式として解くと，$b=-\frac{1}{2}$，$c=3$ となる。

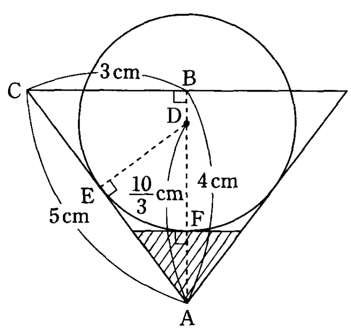
(3)＜**座標**＞右上図のように，直線 AB と y 軸との交点を G とし，2 点 A，B から y 軸に垂線 AH，BI を引く。△OAB＝△OAG＋△OGB＝$\frac{1}{2}\times\mathrm{OG}\times\mathrm{AH}+\frac{1}{2}\times\mathrm{OG}\times\mathrm{BI}$ であり，(2)より直線 AB の切片は 3，点 A の x 座標は -3 だから，OG＝3，AH＝3 である。また，点 B の x 座標が 2 より，BI＝2 である。よって，△OAB＝$\frac{1}{2}\times3\times3+\frac{1}{2}\times3\times2=\frac{15}{2}$ となるから，△BCF＝△OAB＝$\frac{15}{2}$ である。次に，図のように，点 F を通り y 軸に平行な直線を引き，直線 $y=bx+c$，つまり $y=-\frac{1}{2}x+3$ との交点を J とすると，△BCF＝△BJF＋△CJF である。ここで，2 点 F，J の x 座標を t とすると，点 F は放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の点だから $\mathrm{F}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$，点 J は直線 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 上の点だから $\mathrm{J}\left(t,\ -\frac{1}{2}t+3\right)$ となり，$\mathrm{FJ}=\frac{1}{2}t^2-\left(-\frac{1}{2}t+3\right)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t-3$ と表せる。また，辺 FJ を底辺としたときの△BJF の高さは $t-2$ であり，点 C の座標は，$0=-\frac{1}{2}x+3$，$x=6$ より (6, 0) だから，△CJF の高さは $6-t$ と表せる。よって，△BCF＝$\frac{1}{2}\times\mathrm{FJ}\times(t-2)+\frac{1}{2}\times\mathrm{FJ}\times(6-t)=\frac{1}{2}\times\mathrm{FJ}\times\{(t-2)+(6-t)\}=\frac{1}{2}\times\mathrm{FJ}\times4$ だから，$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t-3\right)\times4=\frac{15}{2}$ が成り立つ。これを整理すると，$2t^2+2t-27=0$ となるから，解の公式より，$t=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times2\times(-27)}}{2\times2}=\frac{-2\pm\sqrt{220}}{4}=\frac{-2\pm2\sqrt{55}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{55}}{2}$ となり，点 F の x 座標は 0 より大きいから，$\frac{-1+\sqrt{55}}{2}$ である。

5 〔**空間図形—球，円錐**〕

≪基本方針の決定≫(2)　球とグラスの接点と球の中心とを結んでみる。　(3)　はじめに入っていた水の水面とグラスの上面は平行であることに着目する。

(1)＜**容積**＞グラスの容積は，$\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times4=12\pi(\mathrm{cm}^3)$ である。

(2)＜**体積―相似**＞右図のように，グラスの底をA，上面の中心をB，上面の周上の点をC，球の中心をD，母線ACと球Dとの接点をEとする。△ADEと△ACBにおいて，中心Dは直線AB上にあり，∠ABC＝∠AED＝90°であり，共通な角より∠DAE＝∠CABだから，2組の角がそれぞれ等しく，△ADE∽△ACBとなる。よって，DE：CB＝AD：ACとなり，DE：3＝$\frac{10}{3}$：5が成り立つ。これを解くと，DE×5＝3×$\frac{10}{3}$より，DE＝2となる。したがって，氷の球の体積は，$\frac{4}{3}\pi\times2^3=\frac{32}{3}\pi$(cm³)である。



(3)＜**体積―相似**＞右上図で，水面とグラスの上面は平行だから，水が入った部分とグラスは相似である。氷の球と水面との接点をFとすると，点Fは直線AB上にあり，AF＝AD－DF＝AD－DE＝$\frac{10}{3}-2=\frac{4}{3}$である。よって，AF：AB＝$\frac{4}{3}$：4＝1：3より，水が入った部分とグラスの相似比は1：3だから，水の体積とグラスの容積の比は$1^3:3^3=1:27$となり，はじめに入っていた水の体積は$12\pi\times\frac{1}{27}=\frac{4}{9}\pi$である。また，氷が溶けると体積は$\frac{8}{9}$倍になるから，氷が溶けてできる水の体積は，$\frac{32}{3}\pi\times\frac{8}{9}=\frac{256}{27}\pi$である。したがって，氷が溶けたときの水の体積は$\frac{4}{9}\pi+\frac{256}{27}\pi=\frac{268}{27}\pi$だから，$12\pi-\frac{268}{27}\pi=\frac{56}{27}\pi$(cm³)の水を注ぐと水面の高さがグラスの高さと一致する。

平成26年度　土浦日本大学高等学校　数学解答用紙

記入上の注意

(1) ＨＢの黒鉛筆を使用し、マークすること。
(2) 氏名とフリガナを記入すること。
(3) 受験番号を算用数字で記入すること。
(4) 受験番号欄に番号を正確にマークすること。
(5) 記入すべきこと以外は、絶対に書かないこと。
(6) マークを訂正するときは、プラスチックの消しゴムを使用し、きれいに消すこと。
(7) 消しくずは、きれいに取り除くこと。
(8) この解答用紙は、折ったり汚したりしないこと。

マークの仕方	よい例	わるい例
	●	○ ○ ○ ○

フリガナ	
氏　名	

受験番号

万	千	百	十	一
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

欠席者コード
受験生は記入しないこと。 0

問	小問	記号	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	(1)	ア	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	(2)	イ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	(3)	ウ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		エ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		オ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		カ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	(4)	キ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		ク	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	(5)	ケ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		コ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	(1)	ア	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		イ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	(2)	ウ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		エ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	(3)	オ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		カ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		キ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		ク	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		ケ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	(1)	ア	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		イ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	(2)(i)	ウ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		エ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	(2)(ii)	オ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		カ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		キ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	(1)	ア	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		イ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	(2)	ウ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		エ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		オ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		カ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		キ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	(3)	ク	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		ケ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		コ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		サ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	(1)	ア	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		イ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	(2)	ウ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		エ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		オ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	(3)	カ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		キ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		ク	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		ケ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

評点
/100

推定配点

1　各5点×5
3　各6点×3
5　各6点×3
2　(1)、(2)各6点×2　(3)各4点×2
4　(1)5点　(2)各4点×2　(3)6点

100点	計